

WIELOMIANY - zadania

Wielomianem jednej zmiennej $x \in R$ (funkcją wielomianową) nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{gdzie } n \in N, a_0, a_1, \dots, a_n \in R \text{ i } a_n \neq 0.$$

n – stopień wielomianu (czyli najwyższa potęga x), a_0, a_1, \dots, a_n – współczynniki wielomianu,

a_0 – wyraz wolny wielomianu, np.:

$$W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \quad \text{wielomian stopnia 3}$$

$$G(x) = -5x^5 + 6x + 3 \quad \text{wielomian stopnia 5}$$

$$H(x) = \frac{1}{3}x^4 - 7x^3 - x + \sqrt{2} \quad \text{wielomian stopnia 4}$$

$$V(x) = -9x^2 + 4x - 5 \quad \text{wielomian stopnia 2}$$

$$P(x) = \frac{3}{5}x + 6 \quad \text{wielomian stopnia 1}$$

$$Q(x) = 4 \quad \text{wielomian stopnia zerowego.}$$

Zad. 1

Dane są wielomiany : $W(x) = -3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$, $P(x) = 2x^2 + 3x$, $G(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7$. Wykonaj działania:

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| a) $W(x) + P(x)$ | d) $3P(x) - 2W(x)$ |
| b) $P(x) + 2G(x)$ | e) $W(x) - [P(x) - G(x)]$ |
| c) $G(x) - W(x)$ | |

Zad. 2

Dane są wielomiany : $W(x) = 3x^2 - 2$, $P(x) = x^3 + 2x - 1$, $G(x) = 4x^2 - 3x + 1$. Wykonaj działania:

- $W(x) \cdot P(x)$
- $P(x) \cdot G(x)$
- $[W(x)]^2 \cdot G(x)$

Zad. 3

Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $P(x) = x^3 - 8$, $V(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

- | | |
|---------------------|--------------------------------|
| a) $W(x) + P(x)$ | e) $W(x) \cdot P(x)$ |
| b) $W(x) + 2P(x)$ | f) $P(x) \cdot V(x)$ |
| c) $2W(x) - 4P(x)$ | g) $(x - 2) \cdot V(x) - P(x)$ |
| d) $5P(x) - 10V(x)$ | |

Zad. 4

Dane są wielomiany: $F(x) = 2x^2 - 5x + 3$, $G(x) = x^3 + x^2 - 1$. Oblicz: $F(0)$; $F(-1)$; $F(1)$; $G(0)$; $G(1)$; $F(2) + G(2)$; $F(-1) + G(-1)$; $F(1) - G(1)$; $F(\sqrt{2})$; $G(2\sqrt{3})$.

Zad. 5

Oblicz wartości wielomianu $W(x) = -x^3 + 4x^2 - 7$ dla argumentów -3 ; -1 ; 4 oraz 5 .

Zad. 6

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + 1$. Oblicz $W(\sqrt{2} + 1)$ oraz $W(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Zad. 7

Wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = -x^4 - 2x^3 + ax + 3$, jeśli $W(-2) = -1$.

Zad. 8

Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $W(x)$ jeżeli:

- a) $W(x) = x^3 + 3ax^2 - 2bx + 6$ oraz $W(1) = 5$, $W(2) = 8$
- b) $W(x) = ax^3 - 5x^2 + 7x - 4b$ oraz $W(-1) = 8$, $W(3) = 10$
- c) $W(x) = 3x^3 - 7ax^2 + 8bx + 10b$ oraz $W(-1) = -9$, $W(2) = 18$
- d) $W(x) = -2x^4 + 3ax^3 - 9ax^2 + 5bx - 13$ oraz $W(-2) = -7$, $W(2) = 25$
- e) $W(x) = -5x^3 + ax + b$ oraz $W(-1) = 2$, $W(2) = -31$
- f) $W(x) = ax^4 + bx^2 - 4$ oraz $W(2\sqrt{2}) = 76$, $W(-\sqrt{2}) = 4$.

Zad. 9

Dwa wielomiany są równe \Leftrightarrow mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x (czyli są identyczne), np.:

$W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ jest równy wielomianowi $V(x) = -5x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow$

$a = -5$; $b = 8$; $c = -3$; $d = -6$; $e = 2$.

Wyznacz a oraz b tak, aby wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ były równe, gdy:

- a) $W(x) = x^3 + (a + b)x^2 + 7x - 5$, $P(x) = x^3 + 8x^2 - (a - 2b)x - 5$
- b) $W(x) = -x^4 + (a - b)x^3 + 8x^2 + x - 1$, $P(x) = -x^4 + 6x^3 + (2a - b)x^2 + x - 1$
- c) $W(x) = \left(-a + \frac{1}{2}b\right)x^3 - 4x^2 + 2x - 2$, $P(x) = 3x^3 - \left(\frac{1}{2}a + b\right)x^2 + 2x - 2$
- d) $W(x) = -6x^4 - 9x^2 + \left(a - \frac{1}{3}b\right)x$, $P(x) = (2a - b)x^4 - 9x^2 + 6x$
- e) $W(x) = ax^3 + (2b + 1)x^2 - 6x - 2$, $P(x) = 3x^3 + 9x^2 + (a - 2b - 1)x - 2$
- f) $W(x) = (4a - 3)x^4 + (2b + 8)x^2 - 1$, $P(x) = (3 - 2a)x^4 - 1$
- g) $W(x) = 3(a^2 - 5)x^4 + (b - 3a^2)x^2 + 8x$, $P(x) = -3x^4 + x^2 - (5 - b)x$
- h) $W(x) = 2ax(2x - b)^2$, $P(x) = 16x^3 - 48x^2 + 36x$
- i) $W(x) = (x^2 - ax)(x + 2a) + 8x$, $P(x) = x^3 - 2x^2$.

Zad. 10

Twierdzenie

Liczba a jest pierwiastkiem (miejszem zerowym) wielomianu $W(x) \Leftrightarrow W(a) = 0$.

Sprawdź, czy podana obok wielomianu $W(x)$ liczba jest jego pierwiastkiem, jeżeli:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; 1 | d) $W(x) = x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 20x + 16$; 2 |
| b) $W(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 9$; 3 | e) $W(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; $\sqrt{3}$ |
| c) $W(x) = 6x^4 - 3x^2 + 5x + 3$; -1 | f) $W(x) = x^4 - 3x^2 - 10$; $\frac{1}{2}$. |

Zad. 11

Wyznacz wartość parametru a tak, aby liczba r była pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeżeli:

- | | |
|---|--|
| a) $W(x) = x^4 - x^3 + ax - 2$; $r = 1$ | d) $W(x) = x^5 + x^3 + ax^2 - 8$; $r = 2$ |
| b) $W(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 12$; $r = -2$ | e) $W(x) = ax^3 + x^2 - 2x - 1$; $r = -\frac{1}{2}$ |
| c) $W(x) = x^5 + ax^4 + x^2 - x$; $r = -1$ | f) $W(x) = ax^3 - x^2 + 3x - 1$; $r = \frac{1}{3}$ |

Zad. 12

Wyznacz wartości parametrów a i b , dla których liczby r_1 i r_2 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, jeżeli:

- a) $W(x) = x^3 + ax^2 - 4x + b$; $r_1 = -3$, $r_2 = 2$
b) $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 9$; $r_1 = -1$, $r_2 = 3$
c) $W(x) = ax^3 + x^2 + bx - 1$; $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = 1$
d) $W(x) = ax^3 - x^2 - 12x + b$; $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{1}{3}$.
e) $W(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 2$; $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 1$
f) $W(x) = ax^4 + 19x^3 + bx^2 - x - 2$; $r_1 = -2$, $r_2 = -1$
g) $W(x) = 2x^4 + ax^3 + 12x^2 + bx + 10$; $r_1 = 2$, $r_2 = 2\frac{1}{2}$.

Zad. 13

Wyznacz pierwiastki wielomianów:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $W(x) = 3(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$ | j) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ |
| b) $W(x) = -2(x-1)x(x+1)(x+2)$ | k) $W(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 4$ |
| c) $W(x) = 5x(2x-3)(6-2x)(3x+12)$ | l) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 12x - 20$ |
| d) $W(x) = 6x^3\left(\frac{1}{2}x - 3\right)(2x - 5)(x - \sqrt{3})$ | m) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$ |
| e) $W(x) = (4x^2 - 1)(x + 3)^2(x^2 - 4)$ | n) $W(x) = x^3 + x - 2$ |
| f) $W(x) = 3(9x^2 - 4)(2x + 1)^2(3 - x)^3$ | o) $W(x) = x^3 + 3x + 4$ |
| g) $W(x) = 2x(x^2 - 1)(x^2 + 4)(x + 5)^2$ | p) $W(x) = x^4 - x^2 - 12$ |
| h) $W(x) = -3(x^4 + 1)(2 - x^2)(x^3 + 27)$ | q) $W(x) = 2x^4 - 13x^2 + 6$ |
| i) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 8$ | r) $W(x) = x^6 - 26x^3 - 27$ |

s) $W(x) = x^8 - 3x^4 - 4$

u) $W(x) = 256x^8 - 81$

t) $W(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

Zad. 14

Rozłóż na czynniki wielomiany:

a) $W(x) = x^3 - x$

b) $W(x) = 8x^4 - 27x$

c) $W(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

d) $W(x) = 6x^5 + 15x^4 - 9x^3$

e) $W(x) = (x + 3)^2 - 25$

f) $W(x) = (4x^2 + 20x + 25) - 121$

g) $W(x) = (3x - 6)^2 - 196$

h) $W(x) = (7x - 10)^2 - 225$

i) $W(x) = (4x + 2\sqrt{2})^2 - 9$

j) $W(x) = 3x^5 + 12x^3$

k) $W(x) = -12x^5 + 27x^3$

l) $W(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$

m) $W(x) = -3x^4 + 24x^3 - 48x^2$

n) $W(x) = 2x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$

o) $W(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3$

p) $W(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 15$

q) $W(x) = x^4 + 3x^3 - 8x - 24$

r) $W(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x + 16$

s) $W(x) = x^8 + x^6 - x^4 - x^2$

t) $W(x) = x^4 - 64$

u) $W(x) = 4x^4 - 1$

v) $W(x) = 5x^4 - 20$

ZADANIA MATURALNE

Zad. 1

Rozwiąż równanie : $4x^3 - 6x^2 + 2 = 0$

Zad. 2

Wielomiany $W(x) = ax(x + b)^2$ i $V(x) = x^3 + 2x^2 + x$ są równe. Wyznacz a i b .

Zad. 3

Rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomian $W(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 80$.

Zad. 4

Zbiór rozwiązań równania $|x - 2| = 1$ jest podzbiorem zbioru rozwiązań równania $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$. Wyznacz a oraz b .

Zad. 5

Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 2x^3 + mx - 5$ jest liczba (-2) . Wyznacz parametr m .

Zad. 6

Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 - mx + 36$. Wyznacz parametr m i pozostałe pierwiastki wielomianu.

Zad. 7

Dany jest wielomian $W(x) = (x + 13)(x - |m|)(x - 5)$.

a) Wyznacz liczbę m tak, aby suma pierwiastków tego wielomianu była ujemna

b) Wyznacz liczbę m tak, aby do wykresu wielomianu należał punkt $A=(2,45)$.

Zad. 8

Wyznacz liczby m i k tak, aby wielomian $W(x) = (m + k)x^3 - kx + 7$ był równy wielomianowi

$$G(x) = 10x^3 + 2x + 7.$$

Zad. 9

Wykaż, że jeśli wielomian $W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ spełnia warunek $W(1) = W(-1)$, to $b + d = 0$.

Zad. 10

Pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ są liczby: $-\sqrt{6}$; -2 ; $\sqrt{6}$. Wyznacz parametry b , c i d .

Zad. 11

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$.

a) Wyznacz pierwiastki tego wielomianu

b) Oblicz wartość wielomianu dla $x = -\sqrt{3}$.

Zad. 12

Dany jest wielomian $W(x) = (|m| - 3)x^3 + (3 - m)x^2 + 4x + 16$.

a) Rozłóż ten wielomian na czynniki, jeśli $m = -5$

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wielomian ten jest funkcją kwadratową

c) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wielomian ten jest funkcją liniową.