

Funkcja liniowa jest to funkcja postaci $y = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$ gdzie $a, b \in \mathbf{R}$ oraz

x – argumenty funkcji

y – wartości funkcji

a – współczynnik kierunkowy prostej ($a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α - kąt nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX)

b – współczynnik przesunięcia wykresu. Punkt $(0, b)$ jest to punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej z osią OY.

Jeżeli $a > 0$ to funkcja liniowa jest **rosnąca**

Jeżeli $a < 0$ to funkcja liniowa jest **malejąca**

Jeżeli $a = 0$ to funkcja liniowa jest **stała**.

Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$ jest linia prosta.

Jeżeli wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt $(0, 0)$ – początek układu współrzędnych, to funkcja jest postaci $y = ax$.

Zad. 1

Narysuj wykresy następujących funkcji:

a) $y = 2x$

b) $y = -x + 2$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

d) $y = 3x - 1$

e) $y = \frac{3}{2}x - 2$

f) $y = -2x + 5$

g) $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x < -2 \\ 2 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \leq 3 \\ 2x - 10 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -1 & \text{dla } x \in (-1; 3) \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x \in (3; +\infty) \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \leq -2 \\ 3x + 5 & \text{dla } -2 < x < 1 \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2x - 3 & \text{dla } x \in (2; +\infty) \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x \in (-4; 3) \\ -x + 4 & \text{dla } x \in (3; 6) \end{cases}$

Zad. 2

Sprawdź rachunkiem, które z punktów P; Q czy R należą do prostej l, jeżeli:

a) $l: y = 2x - 4$ P=(5;6) Q=(-3;-10) R= $(-\frac{7}{2}; -11)$

b) $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ P = (-8; -2) Q = $(9; \frac{11}{2})$ R = $(17; 10\frac{1}{2})$

Funkcja liniowa -zadania

c) 1: $y = -\frac{2}{3}x - 1$ $P = (-12; 6)$ $Q = (-1; -\frac{2}{3})$ $R = (15; -11)$

d) 1: $y = -\frac{3}{2}x + 3$ $P = (-10; 18)$ $Q = (\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4})$ $R = (100; -297)$

e) 1: $y = 4x - 15$ $P=(3;-3)$ $Q=(-1;-5)$ $R=(2;-7)$

f) 1: $y = -8x - 5\frac{3}{4}$ $P = (-2; \frac{1}{3})$ $Q = (\frac{1}{2}; -3)$ $R = (-\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$

g) 1: $y = 2\sqrt{3}x - 3$ $P = (\sqrt{3}; 3)$ $Q = (-1; 3 - 2\sqrt{3})$ $R = (\sqrt{6}; 6\sqrt{2} - 3)$

Zad. 3

Uzupełnij tabelę:

a)

x	-3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	9
$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$					

b)

x	0	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
$y = \sqrt{6}x$					

Zad. 4

Wyznacz wartość współczynnika kierunkowego a we wzorze funkcji liniowej, wiedząc, że do wykresu tej funkcji liniowej należy punkt A, jeżeli:

a) $y = ax - 4$ $A=(5;-1)$

b) $y = ax + 8$ $A=(10;6)$

c) $y = ax - 2$ $A=(5;0)$

d) $y = ax + 10$ $A=(-8;4)$

e) $y = ax - 11$ $A=(-3;2)$

f) $y = ax + 5$ $A=(1;4)$

Zad. 5

Wyznacz wartość parametru m, dla którego do wykresu funkcji f należy punkt P, jeżeli:

a) $f(x) = (3 - 2m)x + 6$ $P=(-2;8)$

b) $f(x) = 11 - (4m + 1)x$ $P=(5;-14)$

c) $f(x) = -12 + (3m - 8)x$ $P=(-4;-4)$

d) $f(x) = (6 - 4m)x - 18$ $P=(6;-6)$

e) $f(x) = (-2m + 15)x - 11$ $P=(-3;4)$

f) $f(x) = 100 - (25m + 4)x$ $P=(-1;4)$

g) $f(x) = \frac{3}{4}x - (3m + 5)$ $P = (-8; 1)$

h) $f(x) = -4,5x - (10m - 12)$ $P=(-2;-9)$

i) $f(x) = -3\frac{2}{5}x - (4 - 3m)$ $P = (-5; -2)$

Zad. 6

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem α i przechodzi przez punkt A, jeżeli:

a) $\alpha=30^\circ$ $A=(\sqrt{3}; 2)$

b) $\alpha=135^\circ$ $A=(4;-5)$

c) $\alpha=120^\circ$ $A=(-1;1)$

d) $\alpha=150^\circ$ $A=(3\sqrt{3}; -3)$

e) $\alpha=45^\circ$ $A=(3\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$

f) $\alpha=30^\circ$ $A=(-3;3)$

g) $\alpha=60^\circ$ $A=(1;-4)$

h) $\alpha=0^\circ$ $A=(2;-3)$

i) $\alpha=45^\circ$ $A=(1;1)$

j) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ $A=(2; 3)$

k) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ $A=(16,12)$

l) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ $A=(-1; -4)$

m) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ $A=(-2; 2\frac{1}{2})$

Zad. 7

Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej oraz oblicz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią OX i OY:

Miejsce zerowe funkcji – argument x, dla którego wartość funkcji wynosi 0 ($y = 0$).

Geometryczną interpretacją miejsca zerowego funkcji jest pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu z osią OX

Punkt przecięcia wykresu z osią OY ma współrzędne (0;b)!!!

a) $y = x - 1$

b) $y = \frac{1}{3}x + 2$

c) $y = -2x - 3$

d) $y = 3x + 6$

e) $y = 1,5x - 3$

f) $y = -2\frac{1}{2}x + 5$

g) $y = -\frac{3}{4} + 3x$

h) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

i) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{2}{3}$

j) $y = \sqrt{2}x + 4$

k) $y = \sqrt{3}x - 2$

l) $y = -\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zad. 8

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x < 0 \\ -x + 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -x + 6 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in (2; 4) \\ x - 4 & \text{dla } x \in (4; 6) \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x < 0 \\ 3x - 2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -3x + 21 & \text{dla } x < 0 \\ 5x - 4 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

Funkcja liniowa -zadania

$$g) f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{dla } x < -2 \\ 2x & \text{dla } -2 \leq x < 2 \\ 3 - x & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

Zad. 9

Ustal, dla jakich wartości parametru m miejscem zerowym funkcji f jest x_0 ;

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = (m - 3)x + 2$ $x_0 = 1$ | f) $f(x) = (m^2 - 1)x - 3$ $x_0 = 1$ |
| b) $f(x) = (2 - m)x - 3$ $x_0 = -2$ | g) $f(x) = x + 2m - 5$ $x_0 = -1$ |
| c) $f(x) = (2m - 3)x - 2m + 5$ $x_0 = 2$ | h) $f(x) = (4m - 2)x + m + 3$ $x_0 = 0,5$ |
| d) $f(x) = mx - m - 4$ $x_0 = 3$ | i) $f(x) = 6mx$ $x_0 = 7$ |
| e) $f(x) = (m + 3)x - 4$ $x_0 = 2$ | j) $f(x) = 2x + m^2 - 2$ $x_0 = -5$ |

Zad. 10

Wykaż, że liczba $2 + \sqrt{3}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}x - (7 + 4\sqrt{3})$

Zad. 11

Określ, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy stała. Od czego uzależniasz swój wybór?

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $y = 2x - 1$ | f) $y = -10\frac{1}{2}$ |
| b) $y = -\frac{1}{3}x + 4$ | g) $y = -\frac{3}{5} + 3x$ |
| c) $y = 5$ | h) $y = -5x$ |
| d) $y = 3x$ | i) $y = (3 - 2\sqrt{2})x$ |
| e) $y = 8 - 2,5x$ | |

Zad. 12

Dla jakich wartości parametru m funkcja liniowa określona wzorem:

- a) $f(x) = (3 - 2m)x + 21m$ jest rosnąca,
- b) $f(x) = (5m - 11)x + 3 - 11m$ jest malejąca,
- c) $f(x) = (2m + 5)x - 2m + 7$ jest stała,
- d) $f(x) = (11 - 8m)x + 5m$ jest rosnąca,
- e) $f(x) = (4m - 2)x + 8m - 4$ jest malejąca,
- f) $f(x) = 5 - (\frac{2}{3}m + 3)x$ jest rosnąca?

Zad. 13

Wyznacz wartości parametru k , dla których funkcja f jest rosnąca:

- a) $f(x) = (2k - 5)x + 2$
- b) $f(x) = (4 - 2k)x - 3 + k$
- c) $f(x) = (3 - k)x - 4$
- d) $f(x) = kx - 2x - 4 + k$

Funkcja liniowa -zadania

Zad. 14

Wyznacz wartości parametru p , dla których funkcja f jest malejąca:

- a) $f(x) = (-1 - p)x - 3$
- b) $f(x) = 3p - 4x + px - 2$
- c) $f(x) = -px + 2p$
- d) $f(x) = 4 - (p + 5)x$

Zad. 15

Wyznacz monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m :

- a) $f(x) = (m - 3)x + 6$
- b) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x$
- c) $f(x) = (4 - 2m)x - 7$

Zad. 16

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów x , dla których dana funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

- a) $y = 6x - 18$
- b) $y = -3x + 1$
- c) $y = \frac{1}{2}x + 20$
- d) $y = -0,7x - 0,3$
- e) $y = -2x - 5$
- f) $y = \sqrt{2}x + 4$

Zad. 17

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja $y = 3x - 2$ przyjmuje wartości:

- a) dodatnie
- b) ujemne
- c) większe od 1
- d) mniejsze od 4
- e) nie mniejsze od -5
- f) nie większe od -2

Zad. 18

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja $y = -2x + 3$ przyjmuje wartości :

- a) dodatnie
- b) ujemne
- c) większe od -8
- d) mniejsze od $\frac{3}{4}$
- e) nie mniejsze od 3
- f) nie większe od -5

Funkcja liniowa -zadania

Zad. 19

Napisz wzór funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty :

a) $A=(3,-7)$ $B=(1,-1)$

b) $A=(2,13)$ $B=(-2,-7)$

c) $A=(6,3)$ $B=(3,4)$

d) $A=(9,2)$ $B=(-3,-6)$

e) $A=(-1,-4)$ $B=(1,2)$

f) $A=(-3;1)$ $B=(1;-2)$

g) $A=(-\frac{1}{2}; 2)$ $B = (2; -\frac{1}{2})$

h) $A=(3;4)$ $B=(7;6)$

i) $A=(-2;7)$ $B=(2;-1)$

j) $A=(4;5)$ $B=(-4;9)$

k) $A=(4;-13)$ $B=(2;-7)$

l) $A=(3;3)$ $B=(1;\frac{7}{3})$

m) $A=(\sqrt{3}; 4)$ $B = (3\sqrt{3}; 10)$

n) $A=(5,1)$ $B=(-10,-8)$

o) $A=(3,-1)$ $B=(-6,5)$

p) $A=(2\sqrt{7}, -6)$ $B=(-\sqrt{3}, -6)$

Zad. 20

Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia warunki:

a) $f(-2) = -4$; $f(4) = -1$

e) $f(-1) = 5$ i $f(4) = 0$

b) $f(-3) = 2$ i $f(3) = 6$

f) $f(-3) = -1$ i $f(-2) = 5$

c) $f(-8) = 6$ i $f(-3) = 4$

g) $f(-2) = -4$ i $f(7) = -4$

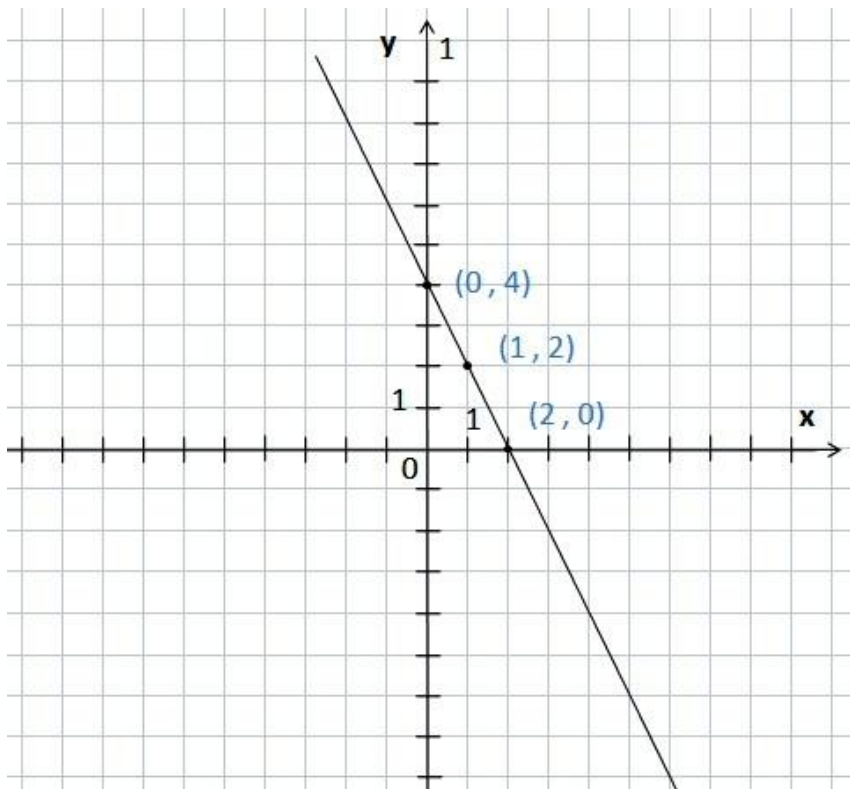
d) $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{2}) = 2$

h) $f(1) = 7$ i $f(3) = 2$

Zad. 21

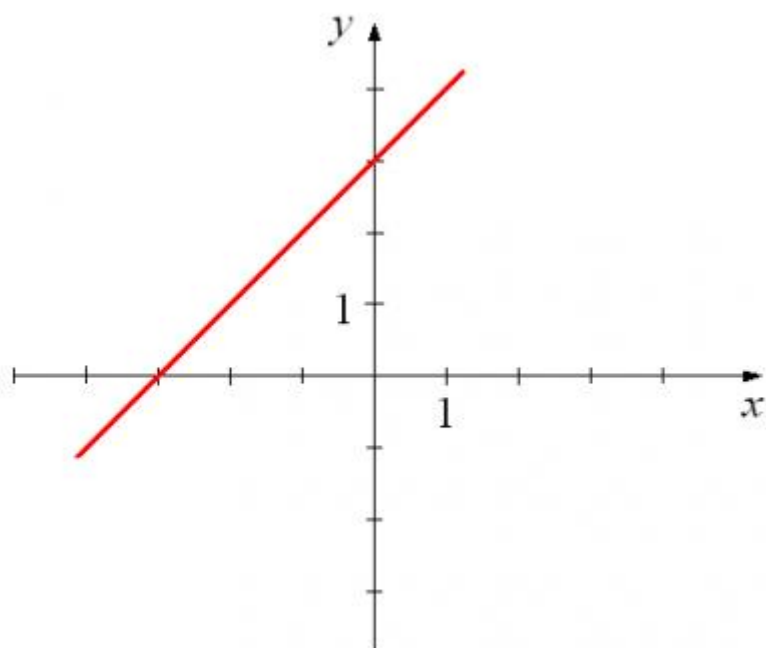
Wyznacz wzory narysowanych funkcji liniowych:

a)

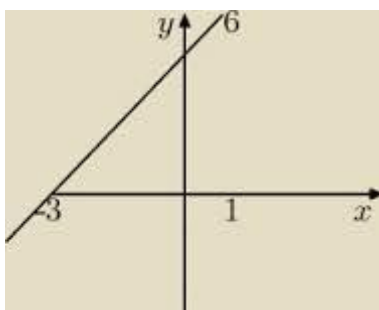
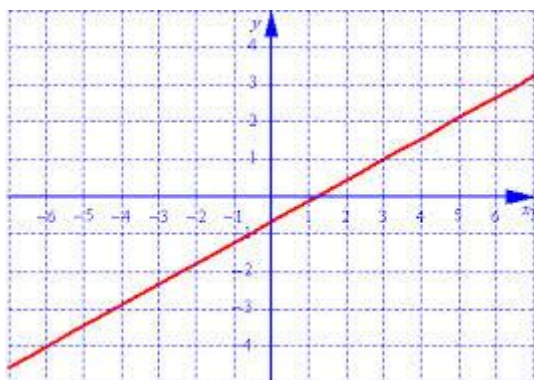


Funkcja liniowa -zadania

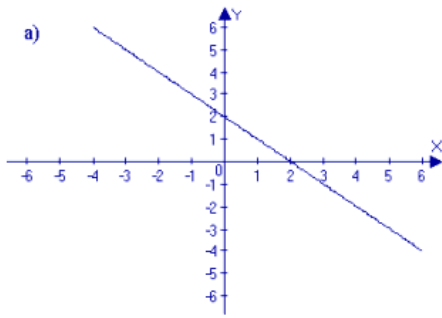
b)



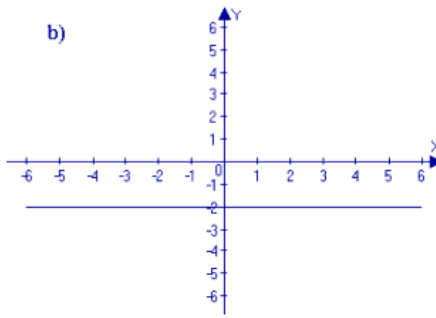
c)



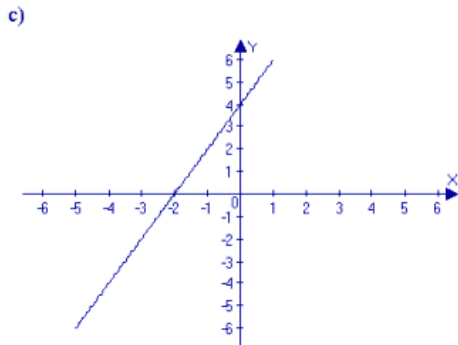
Funkcja liniowa -zadania



$y = \dots\dots\dots$

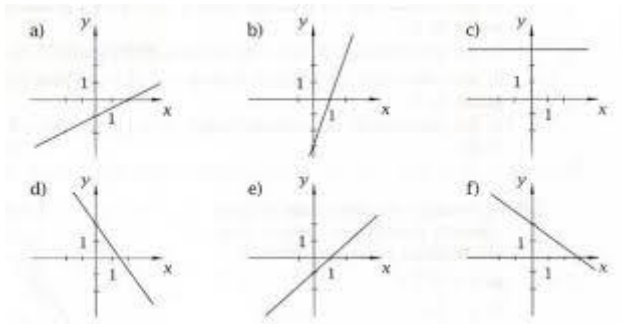


$y = \dots\dots\dots$



$y = \dots\dots\dots$

e)



Zad.22

Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej (tzn. czy są współliniowe):

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $A=(-4;1)$ $B=(8;7)$ $C=(11;5)$ | e) $A=(-2;5)$ $B=(3;5)$ $C=(1;-2)$ |
| b) $A=(2;-7)$ $B=(3;-10)$ $C=(-2;5)$ | f) $A=(2;-3)$ $B=(0;1)$ $C=(10;-19)$ |
| c) $A=(-4;4)$ $B=(-2;0)$ $C=(1;-6)$ | g) $A=(\sqrt{2}; 5)$ $B = (0; 3)$ |
| d) $A=(-4;-3)$ $B=(-2;-2)$ $C=(12;5)$ | $C = (-2; 3 - 2\sqrt{2})$ |

Zad. 23

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji i przechodzi przez dany punkt, jeżeli:

Aby wykresy funkcji liniowych były do siebie równoległe, muszą mieć takie same współczynniki kierunkowe: $y = a_1x + b_1 \parallel y = a_2x + b_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$

- | | |
|---|--|
| a) $y = 2x - 5$ $A=(-1,3)$ | h) $y = -\frac{1}{2} - 5x$ $A = \left(-\frac{1}{5}, -3\right)$ |
| b) $y = -\frac{1}{4}x + 1$ $A = (0,5)$ | i) $y = 3x - 2$ $A=(-1;2)$ |
| c) $y = \frac{2}{3}x + 2$ $A = (6, -4)$ | j) $y = -2x - 4$ $A=(2;5)$ |
| d) $y = -2 + \frac{1}{5}x$ $A = (1,2)$ | k) $y = -\frac{1}{8}x + 3$ $A = (-4; -1)$ |
| e) $y = -8$ $A=(2,3)$ | l) $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x - 3$ $A = (\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ |
| f) $y = 4x - 2$ $A=(3,0)$ | m) $y = 0,125x - 0,25$ $A=(-16;-3)$ |
| g) $y = 0,5x + 1,5$ $A=(-\frac{1}{2}, 4)$ | |

Zad. 24

Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji f i g są do siebie równoległe, jeżeli:

- $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = (m + 1)x + 2$
- $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = (3 - m)x - \sqrt{2}$
- $f(x) = 2 - x$, $g(x) = -\frac{1}{2}mx + 7,2$
- $f(x) = 1 - 2x$, $g(x) = mx + x - 3$
- $f(x) = (2m - 3)x + 4$, $g(x) = -(m + 1)x + 9$
- $f(x) = (-3 - m)x + 2 - m$, $g(x) = (4 + 5m)x - 1$
- $f(x) = -mx - 3 + 2m$, $g(x) = (4 + 3m)x - 5 - 2m$
- $f(x) = (m + 3)x - 4$, $g(x) = (2 - 3m)x + m$
- $f(x) = (1 - m)x$, $g(x) = (2m - 5)x - 7m$
- $f(x) = |m - 1|x + 6$, $g(x) = 5x - 7$
- $f(x) = (\sqrt{3} + m) - \sqrt{3}$, $g(x) = (5 + \sqrt{3}m)x + 2m$
- $f(x) = 4 - (2m + \sqrt{2})x$, $g(x) = (\sqrt{2}m + 2)x + 8$

Zad. 25

Wyznacz wartość parametru a, dla których wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych, jeżeli:

Funkcja liniowa -zadania

- a) $f(x) = (a + 1)x - 2a + 1$, $g(x) = (2a - 3)x + a - 4$
 b) $f(x) = (2a - 1)x - 2a$, $g(x) = (a + 3)x + a - 12$
 c) $f(x) = a - 1 + 2ax$, $g(x) = (a + 2)x + 2$

Zad. 26

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji i przechodzi przez dany punkt, jeżeli:

Aby wykresy funkcji liniowych były do siebie prostopadłe, tzn. :

$$y = a_1x + b_1 \perp y = a_2x + b_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

- a) $y = 4x - 1$ $A=(2,9)$
 b) $y = \frac{3}{4}x$ $A = (-6,3)$
 c) $y = -2x$ $A=(0,3)$
 d) $y = \frac{2}{5}x$ $A = (2; -5)$
 e) $y = -5x - 2$ $A=(-\frac{1}{5}; 0)$
 f) $y = \frac{1}{3}x + 7$ $A = (6; 5)$
 g) $y = -6x + 27$ $A=(\frac{5}{12}; \frac{1}{3})$
 h) $y = 1,5x - \sqrt{3}$ $A = (6; -5)$
 i) $y = 3x + 5$ $A=(-3,-7)$
 j) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $A = (9, -1)$
 k) $y = -x + 7$ $A=(4,-1)$
 l) $y = -1,5x - 2$ $A=(0, -2)$
 m) $y = \sqrt{3}x - 5$ $A = (2\sqrt{3}, -5)$

Zad. 27

Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji f i g są do siebie prostopadłe, jeżeli:

- a) $f(x) = -7x + 8$, $g(x) = mx - 19$
 b) $f(x) = 2x - 3\frac{1}{2}$, $g(x) = (m - 4)x + 2$
 c) $f(x) = (-0,25m + 3)x + 2$, $g(x) = 4x - 8$
 d) $f(x) = 5 + (4 - 2m)x$, $g(x) = -\frac{2}{3}x + 11$
 e) $f(x) = (1 - 2m)x + 1 - 3m$, $g(x) = -3x + 9m$
 f) $f(x) = -x + 3\sqrt{5}m$, $g(x) = (2m - \sqrt{5})x - 19m$
 g) $f(x) = -0,2x - 1$, $g(x) = |m - 3|x + 3$

Funkcja liniowa -zadania

h) $f(x) = m(1 + \sqrt{2})x$, $g(x) = (1 - \sqrt{2})x - 23$

Zad. 28

Funkcja liniowa opisana jest wzorem: $f(x) = -2x + 3$. Wyznacz liczbę a , jeśli:

- a) $f(2a - 4) = 3a + 8$
- b) $f(4a + 1) = f(5a - 3)$
- c) $f(8 - 4a) = \frac{22a - 23}{3}$

Zad. 29

Dane są dwie funkcje liniowe $f(x) = \frac{1}{2}x - 6$ oraz $g(x) = 4x + 2$. Wyznacz liczbę m , jeśli:

- a) $f(m + 4) = g(m - 3)$
- b) $f(4m + 3) = g(6 - 2m)$
- c) $\frac{f(m+2)}{g(m-1)} = \frac{1}{2}$

Zad. 30

Funkcja liniowa f jest opisana wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$. Oblicz wartość wyrażenia $2 \cdot f(-12) + 3 \cdot f(9)$

Zad. 31

Funkcja liniowa f opisana jest wzorem $f(x) = -2x + 3\sqrt{3}$.

- a) Wyznacz te argumenty dla których funkcja f przyjmuje wartości należące do zbioru $A = \langle -3\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \rangle$
- b) Sprawdź, czy liczba $f\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}\right)$ jest wymierna

Zad. 32

Funkcja liniowa f opisana jest wzorem $f(x) = 2x - 3b + 4$. Wyznacz liczbę b , dla której :

- a) Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0,7)$
- b) Miejscem zerowym funkcji jest liczba 8.