

GEOMETRIA ANALITYCZNA – ZADANIA

➤ Odległość w układzie współrzędnych. Środek odcinka.

Zad. 1

Wyznacz odległość między punktami A i B (długość odcinka AB) jeżeli:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- a) A=(5,-3) B=(-2,3)
- b) A=(-2,2) B=(-4,8)
- c) A=(-2,-7) B=(-6,-5)
- d) A=(-3;3) B=(-9;11)
- e) A=(-2;-4) B=(6;5)
- f) A=(-6;2) B=(8;-3)
- g) A=(1,4) B=(1,2)
- h) A=(1,1) B=(3,2)
- i) A=(-3,-1) B=(2,1)
- j) A=(2,5) B=(7,5)
- k) A=(2√3; -4) B = (-3√3; -1)
- l) A=(0,2) B=(-1,0)
- m) A=(1;√2) B = (-2; 3 + √2)
- n) A=(3;√6) B = (√2; -√3)
- o) A=(-1,1) B=(-2,5)

Zad. 2

Oblicz obwód czworokąta, którego wierzchołkami są punkty:

- a) A=(-1;1) B=(5;9) C=(10;-3) D=(0;-3)
- b) A=(1;5) B=(4;9) C=(-4;11) D=(-3;7)

Zad. 3

Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach:

- a) A=(-3;-1) B=(1;1) C=(-1;3)
- b) A=(2;-3) B=(4;-1) C=(2;1)
- c) A=(-4;-2) B=(3;-1) C=(0;2)
- d) A=(-3;1) B=(0;3) C=(4;-3)
- e) A=(1;2) B=(-1;-1) C=(5;2)

Zad. 4

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny:

- a) A=(1,2) B=(5,7) C=(10,3)
- b) A=(-1,0) B=(-2,3) C=(1,1)
- c) A=(2,-1) B=(12,-2) C=(8,3)
- d) A=(-1,-3) B=(-8,6) C=(-6,-4)
- e) A=(-3,-1) B=(1,1) C=(-1,3)
- f) A=(-4,-2) B=(3,-1) C=(0,2)
- g) A=(1;1) B=(5;3) C=(-1;6)
- h) A=(-2;-4) B=(4;2) C=(1;5)
- i) A=(-3;-8) B=(2;2) C=(-2;4)

Zad. 5

Punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami kwadratu ABCD. Oblicz pole o obwód tego kwadratu jeżeli:

- a) A=(-4;-2) B=(2;6)
- b) A=(-1;4) B=(1;5)
- c) A=(-6;8) B=(2;4)
- d) A=(-5;1) B=(7;-5)
- e) A=(-4;3) B=(3;-1)

Zad. 6

- a) Punkty K=(3;-1) i M=(5;-3) są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu KLMN. Oblicz pole i obwód kwadratu.
- b) Wykaż, że czworokąt ABCD jest rombem i oblicz jego pole:
 - A=(-1;0) B=(4;0) C=(7;4) D=(2;4)
 - A=(1;0) B=(4;1) C=(5;4) D=(2;3)
- c) Wykaż, że trójkąt jest równoramienny i oblicz jego pole:
 - A=(2;-1) B=(6;3) C=(0;5)

- $A=(-2;3)$ $B=(2;1)$ $C=(3;8)$

d) przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $(2;1)$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(1;-2)$. Oblicz pole i obwód kwadratu.

e) pole kwadratu jest równe 58, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2;-3)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu, jeśli należy on do prostej $y = x - 4$

f) Wykaż, że czworokąt o wierzchołkach $A=(-2;-1)$ $B=(4;1)$ $C=(6;7)$ $D=(0;5)$ jest rombem. Oblicz długości przekątnych, pole oraz wysokość tego rombu.

g) punkty $A=(-2;-1)$ $C=(4;1)$ są wierzchołkami rombu o boku $5\sqrt{2}$. Oblicz pole tego rombu.

h) Prosta $y = \frac{1}{2}x - 2$ przecina osie układu współrzędnych w punktach $A=(0;a)$ $B=(b;0)$. Oblicz pole i obwód czworokąta ABCD jeżeli :

- $C=(0;-3a)$ $D=(\frac{b}{2}; 0)$
- $C=(2b;b + 2a)$ $D=(-a; b)$

Zad. 7

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeżeli:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

- $A=(0,4)$ $B=(-2,0)$
- $A=(4,-1)$ $B=(-10,9)$
- $A=(-3,1)$ $B=(3,5)$
- $A=(\sqrt{2}, -3)$ $B = (\sqrt{2}, 7)$
- $A=(-3,4)$ $B=(2,-7)$
- $A=(-5,-7)$ $B=(3,5)$
- $A=(2,-3)$ $B=(-10,3)$
- $A=(-1,3)$ $B=(5,15)$
- $A=(1,2)$ $B=(3,4)$

- $A=(-6,-3)$ $B=(-2,-1)$

Zad. 16

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeżeli:

- $A=(1,3)$ $B=(5,9)$
- $A=(6,-1)$ $B=(8,-3)$
- $A=(3,-8)$ $B=(-5,10)$
- $A=(2,3)$ $B=(4,7)$
- $A=(-4,5)$ $B=(6,1)$
- $A=(-1,-2)$ $B=(3,2)$
- $A=(9,-9)$ $B=(-5,-2)$
- $A=(0,7)$ $B=(0,-3)$
- $A=(-1,8)$ $B=(-5,8)$
- $A=(7,-4)$ $B=(-6,13)$

Zad. 8

Mając dane współrzędne punktu A oraz punktu S środka odcinka AB, oblicz współrzędne punktu B, jeżeli:

- $A=(-3,0)$ $S=(-1,2)$
- $A=(0,-2)$ $S=(-2,1)$
- $A=(6,2)$ $S=(3,0)$
- $A=(-3,-3)$ $S=(4,5)$
- $A=(3,4)$ $S=(1,2)$
- $A=(-2,5)$ $S=(0,3)$
- $A=(3,-5)$ $S=(2,0)$
- $A=(5,11)$ $S=(3,1)$
- $A=(-7,8)$ $S=(5,-9)$

Zad. 9

Środkiem odcinka AB jest punkt $S=(1;2)$. Oblicz długość odcinka AB jeżeli:

- $A=(x;-4)$ $B=(5;y)$
- $A=(x;y)$ $B=(x+y;x-y)$

Zad. 10

Punkt S jest środkiem odcinka AB. Oblicz a i b, jeżeli:

- $A=(-1;3)$ $B=(5;-7)$ $S=(a;b)$

b) $A=(3a;2)$ $B=(a;2b)$ $C=(b;a)$

Zad. 11

Wyznacz współrzędne czwartego punktu tak, aby punkty A, B, C i D były kolejnymi wierzchołkami równoległoboku, jeżeli:

- a) $A=(1,2)$ $B=(6,2)$ $C=(8,5)$
- b) $A=(-3,0)$ $C=(0,6)$ $D=(-3,4)$
- c) $A=(-2,3)$ $B=(2,5)$ $D=(-4,5)$
- d) $B=(3,2)$ $C=(5,5)$ $D=(1,4)$
- e) $A=(1,3)$ $B=(2,5)$ $C=(0,-5)$
- f) $B=(1,-4)$ $C=(5,2)$ $D=(3,4)$

Równanie ogólne i kierunkowe prostej. Odległość punktu od prostej.

Zad. 12

Postać ogólna prostej:

$$Ax + By + C = 0$$

Podane równanie kierunkowe prostej zapisz w postaci ogólnej:

- a) $y = 3x - 7$
- b) $y = \frac{1}{2}x + 5$
- c) $y = -2x - 1$
- d) $y = -\frac{3}{4}x - 6$
- e) $y = \sqrt{3}x + 3$
- f) $y = -0,5x + 9$
- g) $y = -4x + 8$
- h) $y = -x$ $y = -3\frac{4}{5}x + 1$
- i) $y = \sqrt[3]{4}x - 2$

Zad. 13

Postać kierunkowa prostej:

$$y = ax + b$$

Podane równanie prostej w postaci ogólnej zapisz w postaci kierunkowej:

- a) $-5x + y - 4 = 0$
- b) $-4x + 6y + 5 = 0$
- c) $2x + 3y - 11 = 0$
- d) $2y - 6 = 0$
- e) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
- f) $x + 3y = 12$
- g) $-2x + y + 8 = 0$
- h) $-6x = 5y - 19$
- i) $-3x - 2y = 0$
- j) $\frac{6}{7}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$ $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
- k) $x + 3y = 12$
- l) $-2x + y + 8 = 0$
- m) $-6x = 5y - 19$
- n) $-3x - 2y = 0$
- o) $-\frac{6}{7}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zad.14

Napisz równanie kierunkowe prostej l o współczynniku kierunkowym a i przechodzącej przez punkt P jeżeli:

- a) $a = 1$, $P=(3,1)$
- b) $a = 2$, $P=(5,-1)$
- c) $a = 1$, $P=(3,1)$
- d) $a = 2$, $P=(5,-1)$
- e) $a = -1$, $P=(2,4)$
- f) $a = 4$, $P=(-3,4)$
- g) $a = \frac{1}{2}$, $P = (-4,1)$
- h) $a = -3$, $P=(\frac{1}{3}, 2)$
- i) $a = 3$, $P=(0,-1)$
- j) $a = -4$, $P=(-3,-6)$
- k) $a = \sqrt{2}$, $P=(-2\sqrt{2}, -4)$
- l) $a = 5\sqrt{3}$, $P=(1,0)$

Zad. 15

Wyznacz równanie prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty, jeżeli:

- a) $A=(-2,7)$ $B=(1,1)$
- b) $A=(-6,1)$ $B=(4,6)$

- c) $A=(0,0)$ $B=(1,-\sqrt{3})$
- d) $A=(4,-5)$ $B=(10,-2)$
- e) $A=(-2;1)$ $B=(3;3)$
- f) $A=(2;6)$ $B=(1;2)$
- g) $A=(0;8)$ $B=(2;4)$
- h) $A=(6,-3)$ $B=(3,-1)$
- i) $A=(-1,3)$ $B=(-2,-2)$
- j) $A=(3,0)$ $B=(1,8)$
- k) $A=(2,2)$ $B=(-5,16)$
- l) $A=(-4,-5)$ $B=(8,4)$
- m) $A=(-\sqrt{2},0)$ $B=(3\sqrt{2},16)$

Zad. 16

Wyznacz odległość punktu $P=(x_0, y_0)$ od prostej

$l: Ax + By + C = 0$ jeżeli:

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- a) $P=(-2,1)$ $l: x + y - 7 = 0$
- b) $P=(1,3)$ $l: 5x - 2y - 3 = 0$
- c) $P=(3,7)$ $l: 2x + 3y + 4 = 0$
- d) $P=(-4,0)$ $l: x - 2y - 11 = 0$
- e) $P=(5,-6)$ $l: 3x + 7y - 10 = 0$
- f) $P=(3,2)$ $l: -5x + 4y - 8 = 0$
- g) $P=(2;1)$ $l: 6x - 8y + 1 = 0$
- h) $P=(-3;0)$ $l: y = 2x + 1$
- i) $P=(-4;-2)$ $l: 2x + y - 3 = 0$
- j) $P=(2;-2)$ $l: y = -\frac{1}{3}x - 1$

Zad. 19

Oblicz pole trójkąta ABC, jeżeli:

- a) $A=(1,3)$ $B=(8,7)$ $C=(3,11)$
- b) $A=(0,5)$ $B=(6,9)$ $C=(4,11)$
- c) $A=(1,6)$ $B=(3,-4)$ $C=(7,12)$
- d) $A=(0,0)$ $B=(3,7)$ $C=(5,9)$
- e) $A=(1,1)$ $B=(4,5)$ $C=(2,8)$
- f) $A=(2,5)$ $B=(8,13)$ $C=(10,-3)$
- g) $A=(1,0)$ $B=(5,3)$ $C=(-2,-9)$

Zad. 20

Sprawdź, czy punkty A, B i C są współliniowe:

- a) $A=(-4,2)$ $B=(8,-2)$ $C=(3,0)$
- b) $A=(-2,-1)$ $B=(4,3)$ $C=(3,2)$
- c) $A=(-2,2)$ $B=(6,6)$ $C=(100,53)$
- d) $A=(1,0)$ $B=(3,5)$ $C=(2,7)$
- e) $A=(-1;2)$ $B=(2;-2)$ $C=(3;-3)$
- f) $A=(-3;-2)$ $B=(3;4)$ $C=(1;2)$
- g) $A=(4;-2)$ $B=(-3;1)$ $C=(-1;1)$

Zad. 21

Znajdź takie m, aby punkty A, B i C były współliniowe (leżały na jednej prostej):

- a) $A=(3,1)$ $B=(9,-1)$ $C=(m-1, m+3)$
- b) $A=(-2,-3)$ $B=(1,3)$ $C=(m-m^2, m)$

Zad. 22

Rozwiąż graficznie układy równań:

- a) $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 4x + y = -6 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x - y = 5 - x \\ 2x - 3y = 3(2 - y) \end{cases}$
- d) $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y - x = -2 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + \frac{1}{2}y = -3 \end{cases}$
- f) $\begin{cases} 3y - x + 1 = 0 \\ 6x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$
- g) $\begin{cases} 2y + x = 3 \\ 5y - 4x = 3 \end{cases}$

Zad. 23

Wyznacz współrzędne punktów przecięcia prostych o równaniach:

- a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ i $y = -\frac{2}{3}x + 4$
- b) $y = 2x + 4$ i $3x + 2y - 1 = 0$
- c) $x + 2y - 4 = 0$ i $3x + 2y = 0$

- d) $4x + y - 1 = 0$ i $y = -x + 7$
 e) $2x - y + 4 = 0$ i $2x - 3y = 0$
 f) $x + 2 = 0$ i $3x - 4y - 2 = 0$
 g) $4x - 3y - 3 = 0$ i $2x + 3y + 21 = 0$
 h) $4x = 5y$ i $2y = -3x$
 i) $2x + 5y - 10 = 0$ i $5y + 1 = 0$

Proste równoległe. Proste prostopadłe. Symetralna odcinka.

Zad. 24

Napisz równanie prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt jeżeli:

Warunek równoległości prostych:

$$y = a_1x + b_1 \quad \parallel \quad y = a_2x + b_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

- a) $y = 3x + 7$ $A=(1,3)$
 b) $y = -4x + 11$ $A=(0,3)$
 c) $y = \frac{1}{2}x + 17$ $A = (2,3)$
 d) $y = 2x - 5$ $A=(2,1)$
 e) $y = -5x + 19$ $A=(1,12)$
 f) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{119}{19}$ $A = (4, \frac{2}{5})$
 g) $y = \frac{3}{5}x - 17$ $A = (-\frac{1}{3}, 5)$
 h) $y = \sqrt{3}x + 4$ $A = (\frac{\sqrt{3}}{3}; 2)$
 i) $2x - 3y + 17 = 0$ $A=(1,1)$
 j) $5x + y - 11 = 0$ $A=(2,0)$
 k) $x + 12y - 27 = 0$ $A=(3,1)$
 l) $5x + 8y - 5 = 0$ $A=(3,0)$
 m) $3x + 2y - 5 = 0$ $A=(-2;-3)$
 n) $x - 4y + 1 = 0$ $A=(-2; \frac{1}{2})$
 o) $2x - y + 4 = 0$ $A=(1; -\frac{1}{3})$
 p) $y = \sqrt{2}x + 2$ $A = (\sqrt{2}, -4)$
 q) $y = -\sqrt{6}x$ $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

Zad. 25

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m , dla których proste k i l są równoległe:

- a) $k: y = 3x - 5m$ $l: y = 2mx + 3m$
 b) $k: y = (3m-1)x + 2m$ $l: y = mx + 5 - 4m$
 c) $k: y = (2-m)x + 3m + 1$ $l: y = (2m+1)x - 11m$
 d) $k: y = (3m+2)x - 7m$ $l: y = (2-5m)x - 7|m|$
 e) $k: y = |m|x + 6$ $l: y = 3x - 7 + |3m|$
 f) $k: y = 5x - 2m + 1$ $l: y = |2m - 1|x + 13m - 9$

Zad. 26

Napisz równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt, jeżeli:

Warunek prostopadłości prostych:

$$y = a_1x + b_1 \perp y = a_2x + b_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$

- a) $y = 2x - 7$ $A=(2,3)$
 b) $y = -4x + 8$ $A=(4,-11)$
 c) $y = -\frac{2}{3}x + \sqrt{2012}$ $A=(4,-7)$
 d) $y = 3x + 11$ $A=(6,3)$
 e) $y = -\frac{1}{5}x + 2$ $A = (-3; -2)$
 f) $y = \frac{1}{2}x + 158$ $A = (3, -2)$
 g) $y = -\sqrt{5}x - 2$ $A = (2\sqrt{5}, 0)$
 h) $x - y + 7 = 0$ $A=(0,3)$
 i) $5x + 2y - 37 = 0$ $A=(1,1)$
 j) $2x - 3y + 18 = 0$ $A=(2,0)$
 k) $x - 3y + 4 = 0$ $A=(-2;0)$
 l) $2x - y + 1 = 0$ $A=(0;-6)$
 m) $4x + 5y - 1 = 0$ $A=(-2;-4)$
 n) $6x - 2y - 15 = 0$ $A=(1,-2)$
 o) $y = -\sqrt{3}x + 1$ $A = (6, 3\sqrt{3})$
 p) $y = \sqrt{2}x - 3$ $A = (-2\sqrt{2}, 6)$

q) $x - 4y + 1 = 0$ $A = (-2, \frac{1}{2})$

Zad. 27

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m , dla których proste k i l są prostopadłe, jeżeli:

- a) $k: y = \frac{1}{2}x + 7 - 2m$ $l: y = 2mx - 13m$
 b) $k: y = (3m+1)x - 2m$ $l: y = -x + 15m - 4$
 c) $k: y = (1-2m)x + 1 - 3m$ $l: y = -2x + |8m+1|$
 d) $k: y = (5m-11)x + 4$ $l: y = 3x + 14$

Zad. 28

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeżeli:

- k) $A=(1,3)$ $B=(5,9)$
 l) $A=(6,-1)$ $B=(8,-3)$
 m) $A=(3,-8)$ $B=(-5,10)$
 n) $A=(2,3)$ $B=(4,7)$
 o) $A=(-4,5)$ $B=(6,1)$
 p) $A=(-1,-2)$ $B=(3,2)$
 q) $A=(9,-9)$ $B=(-5,-2)$
 r) $A=(0,7)$ $B=(0,-3)$
 s) $A=(-1,8)$ $B=(-5,8)$
 t) $A=(7,-4)$ $B=(-6,13)$

Zad. 29

Oblicz pole trójkąta ABC, jeżeli:

- h) $A=(1,3)$ $B=(8,7)$ $C=(3,11)$
 i) $A=(0,5)$ $B=(6,9)$ $C=(4,11)$
 j) $A=(1,6)$ $B=(3,-4)$ $C=(7,12)$
 k) $A=(0,0)$ $B=(3,7)$ $C=(5,9)$
 l) $A=(1,1)$ $B=(4,5)$ $C=(2,8)$
 m) $A=(2,5)$ $B=(8,13)$ $C=(10,-3)$
 n) $A=(1,0)$ $B=(5,3)$ $C=(-2,-9)$

Zad.20

Napisz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC, jeżeli:

- a) $A=(1,3)$ $B=(2,5)$ $C=(0,-5)$
 b) $A=(1,-4)$ $B=(5,2)$ $C=(3,4)$
 c) $A=(-1,2)$ $B=(2,-3)$ $C=(8,1)$
 d) $A=(2,0)$ $B=(5,6)$ $C=(3,-1)$

Zad.30

Oblicz pole równoległoboku ABCD, jeżeli:

- a) $A=(2,1)$ $B=(4,2)$ $C=(3,3)$
 b) $A=(3,0)$ $B=(1,1)$ $C=(-2,1)$
 c) $A=(-6,2)$ $B=(4,3)$ $C=(-1,2)$
 d) $A=(-1,4)$ $B=(3,0)$ $C=(0,-4)$

Równanie okręgu.

Zad.31

Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

Równanie okręgu o środku $S=(a, b)$ i promieniu r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- a) $S=(0,0)$ $r=2$
 b) $S=(-1,0)$ $r=\sqrt{2}$
 c) $S=(1,2)$ $r=2\sqrt{3}$
 d) $S=(0,1)$ $r=3$
 e) $S=(0,-3)$ $r=\sqrt{3}$
 f) $S=(-2,3)$ $r=\sqrt{5}$
 g) $S=(-1,-5)$ $r=3\sqrt{5}$
 h) $S=(4,-2)$ $r=2\sqrt{7}$
 i) $S=(4,-3)$ $r=\frac{1}{2}$
 j) $S=(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ $r=8$

Zad.32

Punkt A należy do okręgu o środku w punkcie S. Napisz równanie tego okręgu, jeżeli:

- a) $A=(3,4)$ $S=(1,2)$
- b) $A=(-2,5)$ $S=(0,3)$
- c) $A=(3,-5)$ $S=(2,0)$
- d) $A=(5,11)$ $S=(3,1)$
- e) $A=(-3,5)$ $S=(-2,-1)$

Zad.33

Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

- a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$
- d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
- e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$
- f) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$
- g) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 39 = 0$
- h) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
- i) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$
- j) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$
- k) $x^2 + y^2 - x + y - \frac{1}{2} = 0$
- l) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$
- m) $x^2 + y^2 + 4y = 0$