

## WIELOMIANY - zadania

Wielomianem jednej zmiennej  $x \in R$  (funkcją wielomianową) nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{gdzie } n \in N, a_0, a_1, \dots, a_n \in R \text{ i } a_n \neq 0.$$

$n$  – stopień wielomianu (czyli najwyższa potęga  $x$ ),  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – współczynniki wielomianu,

$a_0$  – wyraz wolny wielomianu, np.:

$$W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \quad \text{wielomian stopnia 3}$$

$$G(x) = -5x^5 + 6x + 3 \quad \text{wielomian stopnia 5}$$

$$H(x) = \frac{1}{3}x^4 - 7x^3 - x + \sqrt{2} \quad \text{wielomian stopnia 4}$$

$$V(x) = -9x^2 + 4x - 5 \quad \text{wielomian stopnia 2}$$

$$P(x) = \frac{3}{5}x + 6 \quad \text{wielomian stopnia 1}$$

$$Q(x) = 4 \quad \text{wielomian stopnia zerowego.}$$

Zad. 1

Dane są wielomiany :  $W(x) = -3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$ ,  $P(x) = 2x^2 + 3x$ ,  $G(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7$ . Wykonaj działania:

- |                   |                           |
|-------------------|---------------------------|
| a) $W(x) + P(x)$  | d) $3P(x) - 2W(x)$        |
| b) $P(x) + 2G(x)$ | e) $W(x) - [P(x) - G(x)]$ |
| c) $G(x) - W(x)$  |                           |

Zad. 2

Dane są wielomiany :  $W(x) = 3x^2 - 2$ ,  $P(x) = x^3 + 2x - 1$ ,  $G(x) = 4x^2 - 3x + 1$ . Wykonaj działania:

- $W(x) \cdot P(x)$
- $P(x) \cdot G(x)$
- $[W(x)]^2 \cdot G(x)$

Zad. 3

Dane są wielomiany:  $W(x) = 2x^3 - 7x + 4$ ,  $P(x) = x^3 - 8$ ,  $V(x) = x^2 + 2x + 4$ . Wykonaj działania:

- |                     |                                |
|---------------------|--------------------------------|
| a) $W(x) + P(x)$    | e) $W(x) \cdot P(x)$           |
| b) $W(x) + 2P(x)$   | f) $P(x) \cdot V(x)$           |
| c) $2W(x) - 4P(x)$  | g) $(x - 2) \cdot V(x) - P(x)$ |
| d) $5P(x) - 10V(x)$ |                                |

Zad. 4

Dane są wielomiany:  $F(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ,  $G(x) = x^3 + x^2 - 1$ . Oblicz:  $F(0)$ ;  $F(-1)$ ;  $F(1)$ ;  $G(0)$ ;  $G(1)$ ;  $F(2) + G(2)$ ;  $F(-1) + G(-1)$ ;  $F(1) - G(1)$ ;  $F(\sqrt{2})$ ;  $G(2\sqrt{3})$ .

Zad. 5

Oblicz wartości wielomianu  $W(x) = -x^3 + 4x^2 - 7$  dla argumentów -3; -1; 4 oraz 5.

Zad. 6

Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 - x^2 + 1$ . Oblicz  $W(\sqrt{2} + 1)$  oraz  $W(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ .

Zad. 7

Wyznacz współczynnik  $a$  wielomianu  $W(x) = -x^4 - 2x^3 + ax + 3$ , jeśli  $W(-2) = -1$ .

Zad. 8

Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  wielomianu  $W(x)$  jeżeli:

- a)  $W(x) = x^3 + 3ax^2 - 2bx + 6$  oraz  $W(1) = 5$ ,  $W(2) = 8$
- b)  $W(x) = ax^3 - 5x^2 + 7x - 4b$  oraz  $W(-1) = 8$ ,  $W(3) = 10$
- c)  $W(x) = 3x^3 - 7ax^2 + 8bx + 10b$  oraz  $W(-1) = -9$ ,  $W(2) = 18$
- d)  $W(x) = -2x^4 + 3ax^3 - 9ax^2 + 5bx - 13$  oraz  $W(-2) = -7$ ,  $W(2) = 25$
- e)  $W(x) = -5x^3 + ax + b$  oraz  $W(-1) = 2$ ,  $W(2) = -31$
- f)  $W(x) = ax^4 + bx^2 - 4$  oraz  $W(2\sqrt{2}) = 76$ ,  $W(-\sqrt{2}) = 4$ .

Zad. 9

**Dwa wielomiany są równe  $\Leftrightarrow$  mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $x$  (czyli są identyczne), np.:**

**$W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  jest równy wielomianowi  $V(x) = -5x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow$**

**$a = -5$ ;  $b = 8$ ;  $c = -3$ ;  $d = -6$ ;  $e = 2$ .**

Wyznacz  $a$  oraz  $b$  tak, aby wielomiany  $W(x)$  i  $P(x)$  były równe, gdy:

- a)  $W(x) = x^3 + (a + b)x^2 + 7x - 5$ ,  $P(x) = x^3 + 8x^2 - (a - 2b)x - 5$
- b)  $W(x) = -x^4 + (a - b)x^3 + 8x^2 + x - 1$ ,  $P(x) = -x^4 + 6x^3 + (2a - b)x^2 + x - 1$
- c)  $W(x) = \left(-a + \frac{1}{2}b\right)x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ ,  $P(x) = 3x^3 - \left(\frac{1}{2}a + b\right)x^2 + 2x - 2$
- d)  $W(x) = -6x^4 - 9x^2 + \left(a - \frac{1}{3}b\right)x$ ,  $P(x) = (2a - b)x^4 - 9x^2 + 6x$
- e)  $W(x) = ax^3 + (2b + 1)x^2 - 6x - 2$ ,  $P(x) = 3x^3 + 9x^2 + (a - 2b - 1)x - 2$
- f)  $W(x) = (4a - 3)x^4 + (2b + 8)x^2 - 1$ ,  $P(x) = (3 - 2a)x^4 - 1$
- g)  $W(x) = 3(a^2 - 5)x^4 + (b - 3a^2)x^2 + 8x$ ,  $P(x) = -3x^4 + x^2 - (5 - b)x$
- h)  $W(x) = 2ax(2x - b)^2$ ,  $P(x) = 16x^3 - 48x^2 + 36x$
- i)  $W(x) = (x^2 - ax)(x + 2a) + 8x$ ,  $P(x) = x^3 - 2x^2$ .

Zad. 10

**Twierdzenie**

**Liczba  $a$  jest pierwiastkiem (miejszem zerowym) wielomianu  $W(x) \Leftrightarrow W(a) = 0$ .**

Sprawdź, czy podana obok wielomianu  $W(x)$  liczba jest jego pierwiastkiem, jeżeli:

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ ; 1  | d) $W(x) = x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 20x + 16$ ; 2 |
| b) $W(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 9$ ; 3  | e) $W(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ ; $\sqrt{3}$       |
| c) $W(x) = 6x^4 - 3x^2 + 5x + 3$ ; -1 | f) $W(x) = x^4 - 3x^2 - 10$ ; $\frac{1}{2}$ . |

Zad. 11

Wyznacz wartość parametru  $a$  tak, aby liczba  $r$  była pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ , jeżeli:

- |   |  |
|---|--|
| a) $W(x) = x^4 - x^3 + ax - 2$ ; $r = 1$    | d) $W(x) = x^5 + x^3 + ax^2 - 8$ ; $r = 2$           |
| b) $W(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 12$ ; $r = -2$ | e) $W(x) = ax^3 + x^2 - 2x - 1$ ; $r = -\frac{1}{2}$ |
| c) $W(x) = x^5 + ax^4 + x^2 - x$ ; $r = -1$ | f) $W(x) = ax^3 - x^2 + 3x - 1$ ; $r = \frac{1}{3}$  |

Zad. 12

Wyznacz wartości parametrów  $a$  i  $b$ , dla których liczby  $r_1$  i  $r_2$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$ , jeżeli:

- a)  $W(x) = x^3 + ax^2 - 4x + b$ ;  $r_1 = -3$ ,  $r_2 = 2$   
b)  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 9$ ;  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 3$   
c)  $W(x) = ax^3 + x^2 + bx - 1$ ;  $r_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $r_2 = 1$   
d)  $W(x) = ax^3 - x^2 - 12x + b$ ;  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = \frac{1}{3}$ .  
e)  $W(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 2$ ;  $r_1 = \frac{2}{3}$ ,  $r_2 = 1$   
f)  $W(x) = ax^4 + 19x^3 + bx^2 - x - 2$ ;  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = -1$   
g)  $W(x) = 2x^4 + ax^3 + 12x^2 + bx + 10$ ;  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 2\frac{1}{2}$ .

Zad. 13

Wyznacz pierwiastki wielomianów:

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| a) $W(x) = 3(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$                                   | j) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$   |
| b) $W(x) = -2(x-1)x(x+1)(x+2)$                                      | k) $W(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 4$   |
| c) $W(x) = 5x(2x-3)(6-2x)(3x+12)$                                   | l) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 12x - 20$ |
| d) $W(x) = 6x^3\left(\frac{1}{2}x - 3\right)(2x - 5)(x - \sqrt{3})$ | m) $W(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$   |
| e) $W(x) = (4x^2 - 1)(x + 3)^2(x^2 - 4)$                            | n) $W(x) = x^3 + x - 2$            |
| f) $W(x) = 3(9x^2 - 4)(2x + 1)^2(3 - x)^3$                          | o) $W(x) = x^3 + 3x + 4$           |
| g) $W(x) = 2x(x^2 - 1)(x^2 + 4)(x + 5)^2$                           | p) $W(x) = x^4 - x^2 - 12$         |
| h) $W(x) = -3(x^4 + 1)(2 - x^2)(x^3 + 27)$                          | q) $W(x) = 2x^4 - 13x^2 + 6$       |
| i) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 8$                                     | r) $W(x) = x^6 - 26x^3 - 27$       |

s)  $W(x) = x^8 - 3x^4 - 4$

u)  $W(x) = 256x^8 - 81$

t)  $W(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

Zad. 14

Rozłóż na czynniki wielomiany:

a)  $W(x) = x^3 - x$

b)  $W(x) = 8x^4 - 27x$

c)  $W(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

d)  $W(x) = 6x^5 + 15x^4 - 9x^3$

e)  $W(x) = (x + 3)^2 - 25$

f)  $W(x) = (4x^2 + 20x + 25) - 121$

g)  $W(x) = (3x - 6)^2 - 196$

h)  $W(x) = (7x - 10)^2 - 225$

i)  $W(x) = (4x + 2\sqrt{2})^2 - 9$

j)  $W(x) = 3x^5 + 12x^3$

k)  $W(x) = -12x^5 + 27x^3$

l)  $W(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$

m)  $W(x) = -3x^4 + 24x^3 - 48x^2$

n)  $W(x) = 2x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$

o)  $W(x) = 4x^3 + 12x^2 - x - 3$

p)  $W(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 15$

q)  $W(x) = x^4 + 3x^3 - 8x - 24$

r)  $W(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x + 16$

s)  $W(x) = x^8 + x^6 - x^4 - x^2$

t)  $W(x) = x^4 - 64$

u)  $W(x) = 4x^4 - 1$

v)  $W(x) = 5x^4 - 20$

## ZADANIA MATURALNE

Zad. 1

Rozwiąż równanie :  $4x^3 - 6x^2 + 2 = 0$

Zad. 2

Wielomiany  $W(x) = ax(x + b)^2$  i  $V(x) = x^3 + 2x^2 + x$  są równe. Wyznacz  $a$  i  $b$ .

Zad. 3

Rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomian  $W(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 80$ .

Zad. 4

Zbiór rozwiązań równania  $|x - 2| = 1$  jest podzbiorem zbioru rozwiązań równania  $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ . Wyznacz  $a$  oraz  $b$ .

Zad. 5

Pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = 2x^3 + mx - 5$  jest liczba  $(-2)$ . Wyznacz parametr  $m$ .

Zad. 6

Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = x^3 - 4x^2 - mx + 36$ . Wyznacz parametr  $m$  i pozostałe pierwiastki wielomianu.

Zad. 7

Dany jest wielomian  $W(x) = (x + 13)(x - |m|)(x - 5)$ .

a) Wyznacz liczbę  $m$  tak, aby suma pierwiastków tego wielomianu była ujemna

b) Wyznacz liczbę  $m$  tak, aby do wykresu wielomianu należał punkt  $A=(2,45)$ .

Zad. 8

Wyznacz liczby  $m$  i  $k$  tak, aby wielomian  $W(x) = (m + k)x^3 - kx + 7$  był równy wielomianowi

$$G(x) = 10x^3 + 2x + 7.$$

Zad. 9

Wykaż, że jeśli wielomian  $W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  spełnia warunek  $W(1) = W(-1)$ , to  $b + d = 0$ .

Zad. 10

Pierwiastkami wielomianu  $W(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  są liczby:  $-\sqrt{6}$ ;  $-2$ ;  $\sqrt{6}$ . Wyznacz parametry  $b$ ,  $c$  i  $d$ .

Zad. 11

Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ .

a) Wyznacz pierwiastki tego wielomianu

b) Oblicz wartość wielomianu dla  $x = -\sqrt{3}$ .

Zad. 12

Dany jest wielomian  $W(x) = (|m| - 3)x^3 + (3 - m)x^2 + 4x + 16$ .

a) Rozłóż ten wielomian na czynniki, jeśli  $m = -5$

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których wielomian ten jest funkcją kwadratową

c) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których wielomian ten jest funkcją liniową.